Probleme de Bâle et séries de Fourier.

Nathan Fournié

25 juin 2025

L'objectif de cet exposé est d'arriver au fameux résultat : $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Le premier à avoir trouvé une preuve de ce résultat est Euler en 1735. Par la suite cet exercice deviendra un grand classique en mathématique. Avec Riemann, il prendra le nom du calcul de $\zeta(2)$.

Dans notre cas, nous utiliserons le développement en série de Fourier d'une fonction bien choisie afin d'arriver au résultat.

Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $2\pi-\textit{périodique}$ définie par $f(t)=t^2$ pour tout $t\in]-\pi,\pi]$.

La fonction $t\mapsto t^2$est C^1 sur $[-k\pi,\pi]$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc f est C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$.
Nous aurons besoins d'un théorème et de son corrollaire :

Théorème de Dirichlet :

Soit f une fonction C^1, alors la série de Fourier de f converge uniformement vers f.

Corollaire :

Supposons que f soit $2\pi-\textit{périodique}$ et C^1 par morceau, alors si x est un point où f est continue,

$$f(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}c_n(f)e^{inx}$$

Où $c_n(f)$ désigne les coefficients exponentiels de Fourier de f.

Alors, d'après le corollaire, on sait que f est au moins limite simple de sa série de Fourier.
De plus, f est une fonction paire, donc :

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(f)\cos(nx)$$

Avec : $a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt$ et, pour tout $n\geqslant 1$, $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$

Calcul de $a_0(f)$:

$$\begin{aligned}
a_0(f) =& \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)dt \\
=& \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t^2 dt \\
=& \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

Pour calculer $a_n(f)$, on fera une douple intégration par partie.

$$\begin{aligned}
a_n(f) =& \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} t^2\cos(nt)dt \\
& u(t) = t^2 \quad u'(t) = 2t \\
& v'(t) = \cos(nt) \quad v(t) = \frac{\sin(nt)}{n} \\
a_n(f) =& \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int\limits_0^{\pi} t\sin(nt)dt \\
=& \frac{4}{n\pi}\int\limits_0^{\pi} t\sin(nt)dt \\
& u(t) = t \quad u'(t) = 1 \\
& v'(t) = \sin(nt) \quad v(t) = \frac{-\cos(nt)}{n} \\
a_{n(}(f) =& -\frac{4}{n\pi}\left[\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt \\
=& \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{4}{n\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

De là, on remarque que $\|a_n(f)\|_\infty = \frac{4}{n^2}$ et donc que la série de FOURIER de f converge normalement, vers $t \to t^2$ sur $[-\pi,\pi]$ en vertu du théorème de DIRICHLET.
Et alors, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$:

$$\begin{aligned}
t^2 =& a_0(f) + \sum_{n\geqslant 1} a_n(f) \\
t^2 =& \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geqslant 11}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)
\end{aligned}$$

Et, en particulier pour $t = \pi$,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$$

Ce qui nous conduit au résultat escompté : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.